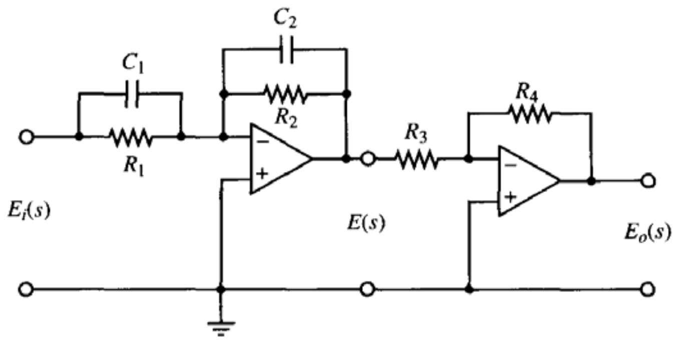
Compensador en adelanto

por el método de respuesta en frecuencia

Compensador electrónico en adelanto con amplificadores operacionales



$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}\,\frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}\,\frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$$

$$= K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha T s + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

$$T = R_1 C_1 \qquad \alpha T = R_2 C_2 \qquad K_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}$$

$$K_c \alpha = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \qquad \alpha = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}$$

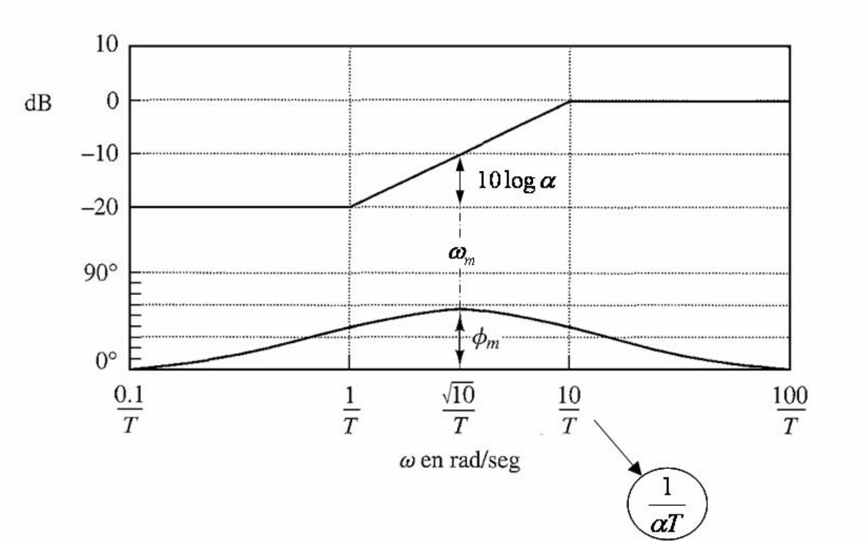
Ésta es una red de adelanto si $R_1 C_1 > R_2 C_2$ o $\alpha < 1$ y una red de atraso si $R_1 C_1 < R_2 C_2$.
La ganancia del compensador en adelanto es $K_c \alpha$

El compensador tiene un cero en $s = -1/T$ y un polo en $s = -1/(\alpha T)$.

Dado que $0 < \alpha < 1$, vemos que el cero siempre se ubica a la izquierda del polo en el eje de frecuencia.

El valor mínimo de α está limitado por la construcción física del compensador de adelanto. Por lo general, el valor mínimo de α se ubica cerca de 0.05. (Esto significa que el adelanto de fase máximo que produce el compensador es de alrededor de 65°.)

Diagrama de Bode de un compensador en adelanto con $K_c = 1$ y $\alpha = 0.1$



$$log\ \omega_m = \frac{log\ \frac{1}{T} + log\ \frac{1}{\alpha T}}{2}$$

$$2log\ \omega_m = log\ \frac{1}{T} + log\ \frac{1}{\alpha T}$$

$$log\ \omega_m^2 = log\left[\left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{1}{\alpha T}\right)\right]$$

$$\omega_m^2 = \left(\frac{1}{\alpha T^2}\right)$$

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

$$\phi_m = \angle G_c(j\omega_m) = \angle(\omega_m Tj + 1) - \angle(\omega_m \alpha Tj + 1)$$

$$\phi_m = tan^{-1}\omega_m T - tan^{-1}\omega_m \alpha T \qquad \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\tan\phi_m = \tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \tan^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$tan\ \phi_m = \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}} = \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$sen\ \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

Técnicas de compensación de adelanto

1. Determine la ganancia *K* que satisfaga el requerimiento sobre la constante estática de error determinada.

2. Usando la ganancia *K* determinada, dibuje la grafica de Bode de *G(jω)*. Calcule el valor del Margen de fase y el Margen de ganancia con sus respectivas frecuencias. Estos son las características originales del sistema

   MF_{orig} = margen de fase original

   ω_c = frecuencia de transición de ganancia original

   MG_{orig} = margen de ganancia original

   ω_f = frecuencia de transición de fase original

3. Si las características originales no satisfacen lo especificado, entonces, calcule la cantidad de fase de adelanto ϕ_m requerido que debe de entregar el compensador en adelanto.

$$\phi_m = MF_{esp} - MF_{orig} + \phi_{adic}$$

4. MF_{esp} es el margen de fase especificado, ϕ_{adic} son los grados adicionales que hay que agregar para compensar la caída de ángulo debido al corrimiento de frecuencia, producido por la magnitud $(10\log\alpha)$ que agrega el compensador en ω_m. El ángulo ϕ_m no debe de ser mayor a 65°. (Hay que proponer el ángulo ϕ_{adic}).

5. De la cantidad de fase requerida, determine el factor de atenuación *α* a partir de la ecuación.

$$\alpha = \left(\frac{1 - sen\phi_m}{1 + sen\phi_m}\right)$$

6. Determine la frecuencia ω_m a la cual la magnitud del sistema no compensado *G(jω)* es igual a $(10\log\alpha)$. Seleccione ésta como la nueva frecuencia de transición de ganancia. Esta frecuencia corresponde a

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

   y el cambio de fase máximo ϕ_m ocurre en esta frecuencia.

7. Calcule la caída de ángulo, la cuál será, el defasamiento en la frecuencia de transición de ganancia original (ω_c) menos el defasamiento en la nueva frecuencia de transición de ganancia (ω_m).

$$\phi_{caida} = \angle G(j\omega_c) - \angle G(j\omega_m)$$

   Esta caída deberá ser aproximadamente igual a los grados adicionales $\phi_{adic} \approx \phi_{caida}$. Si no se cumple esta condición se deberá modificar los grados adicionales y repetir los pasos del 3 al 7

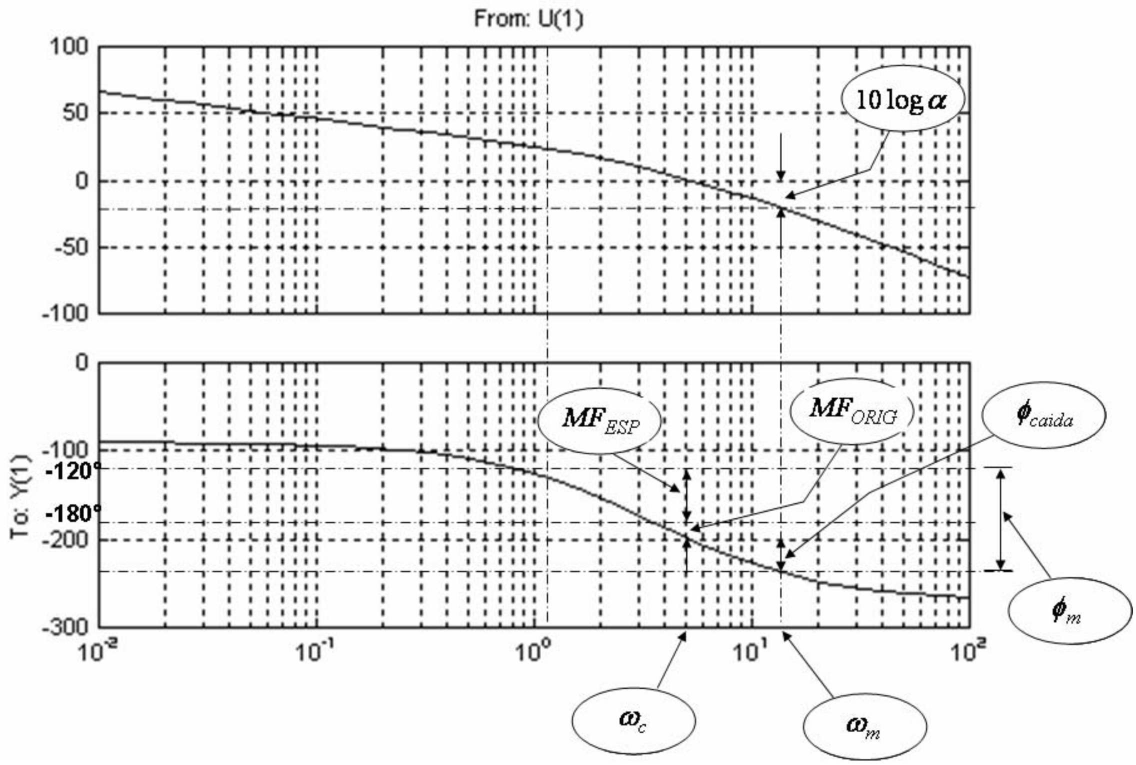
8. Determine las frecuencias de esquina del compensador de adelanto:

   Cero del compensador de adelanto: $\frac{1}{T}$

Polo del compensador de adelanto: $\dfrac{1}{\alpha T}$

9. El compensador quedaría

$$G_c(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$



Ejemplo 1

La función de transferencia de lazo abierto de un sistema de control es

$$G(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$$

Se desea que el sistema cumpla con las siguientes especificaciones

1. El coeficiente estático de error de velocidad $K_v = 20\ seg^{-1}$
2. El margen de fase $MF \geq 50°$
3. El margen de ganancia $MG \geq 10\ dB$

Solución

El coeficiente estático de error de velocidad del sistema original

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{4K}{s(s+2)} = 2K$$

Como se desea que $K_v = 20\ seg^{-1}$ entonces

$$2K = 20 \qquad\qquad K = 10$$

El sistema sería

$$G(s) = \frac{40}{s(s+2)}$$

El margen de fase para este sistema es

$$MF = 17.96° \qquad \omega_c = 6.17\ rad/seg$$
$$MG = \infty$$

El ángulo que debe de proporcionar el compensador en adelanto

$$\phi_m = MF_{esp} - MF_{orig} + \phi_{adic}$$

Se propone 6° como grados adicionales

$$\phi_m = 50° - 17.96° + 6° = 38.04°$$

$$\alpha = \frac{1 - sen\ \phi_m}{1 + sen\ \phi_m} = \frac{1 - sen\ (38.04°)}{1 + sen\ (38.04°)} = 0.237$$

$$10 \log \alpha = 10 \log (0.237) = -6.244\ dB$$

En $\omega = 8.95$ tenemos una magnitud de -6.244 dB, ésta sería la nueva frecuencia de transición de ganancia

$$\omega_m = 8.95$$

La caída de ángulo debido al corrimiento de frecuencia de *6.17 a 8.95* es el defasamiento en la frecuencia de transición de ganancia original (ω_c) menos el defasamiento en la nueva frecuencia de transición de ganancia (ω_m)

$$\phi_{caida} = \angle G(j\omega_c) - \angle G(j\omega_m)$$

Esta caída deberá ser menor o igual a los grados adicionales $\phi_{adic} \approx \phi_{caida}$

$$\phi_{caida} = -162.04° - (-167.4°) = 5.36°$$

Como $\phi_{adic} \approx \phi_{caida}$, se continúa con el diseño, si no lo fueran habría que modificar los grados adicionales y volver a diseñar.

El cero del compensador sería

$$\frac{1}{T} = \omega_m \sqrt{\alpha} = 8.95\sqrt{0.237} = 4.357$$

El polo

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{4.357}{0.237} = 18.384$$

El compensador sería

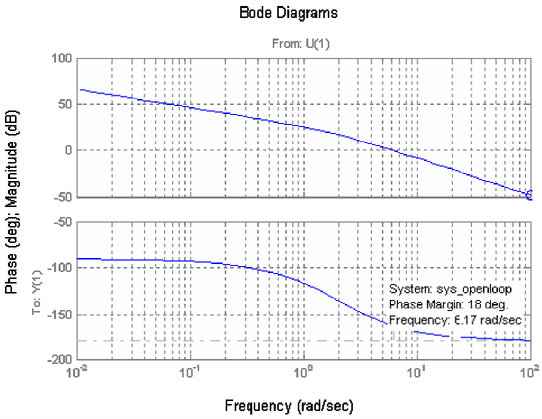
$$G_c(s) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}\right) = \frac{1}{0.237}\left(\frac{s+4.357}{s+18.384}\right)$$

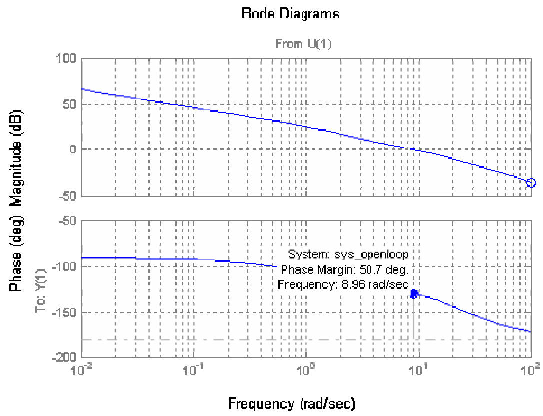
El sistema compensado es

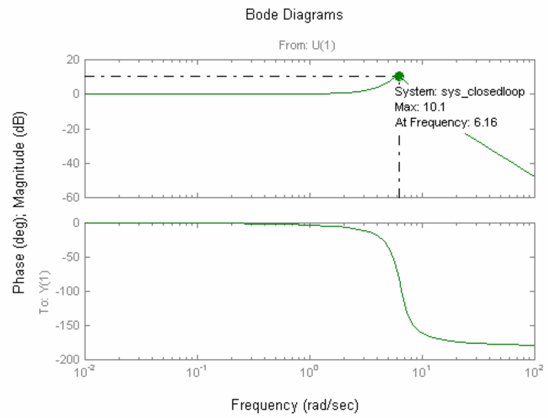
$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{40}{s(s+2)}\right)\left(\frac{s+4.357}{s+18.384}\right)\frac{1}{0.237}$$

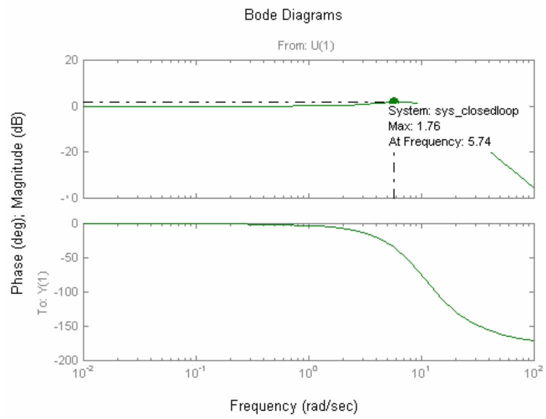
Para el sistema compensado

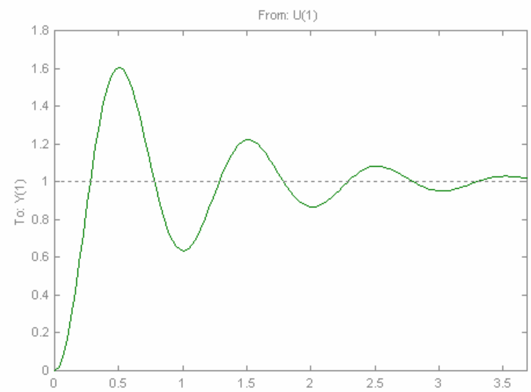
$$MF = 50.66° \qquad \omega_m = 8.96\ rad/seg$$
$$MG = \infty$$

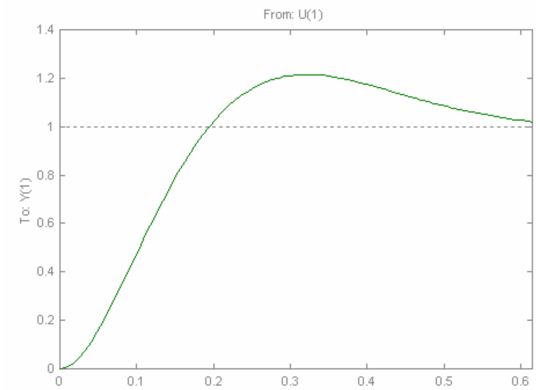

Bode Diagrams
From: U(1)
Phase (deg); Magnitude (dB)
To: Y(1)
System: sys_openloop
Phase Margin: 18 deg.
Frequency: 6.17 rad/sec
Frequency (rad/sec)


Bode Diagrams
From: U(1)
Phase (deg) Magnitude (dB)
To: Y(1)
System: sys_openloop
Phase Margin: 50.7 deg.
Frequency: 8.96 rad/sec
Frequency (rad/sec)


Bode Diagrams
From: U(1)
Phase (deg); Magnitude (dB)
To: Y(1)
System: sys_closedloop
Max: 10.1
At Frequency: 6.16
Frequency (rad/sec)


Bode Diagrams
From: U(1)
Phase (deg); Magnitude (dB)
To: Y(1)
System: sys_closedloop
Max: 1.76
At Frequency: 5.74
Frequency (rad/sec)


From: U(1)
To: Y(1)


From: U(1)
To: Y(1)

Ejemplo 2

La función de transferencia de lazo abierto de un sistema de control es

$$G(s)=\frac{24K}{s(s+2)(s+6)}$$

Se desea que el sistema cumpla con las siguientes especificaciones:

El error en estado estable para una entrada rampa con pendiente 2π debe ser menor o iguala $\frac{\pi}{10}$
Un margen de fase $MF \geq 45°$
La frecuencia de cruce de ganancia $\omega_c \geq 1\, {}^{rad}\!/_{seg}$

Solución

El coeficiente estático de error de velocidad del sistema original

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{24K}{s(s+2)(s+6)} = 2K$$

Como se desea que $e_{ss} = \frac{\pi}{10}$ entonces

$$e_{ss} = \frac{R_1}{K_v} = \frac{2\pi}{2K} = \frac{\pi}{K} \qquad \text{como} \qquad \frac{\pi}{K} = \frac{\pi}{10} \quad \text{entonces } K = 10$$

El sistema sería

$$G(s)=\frac{240}{s(s+2)(s+6)}$$

El margen de fase para este sistema es

$$MF = -20.78° \qquad \omega_c = 5.3\, rad/seg$$
$$MG = -7.93\, dB \qquad \omega = 3.47\, rad/seg$$

Ya que el sistema es muy inestable, para llevar al sistema de -20.78° hasta 45° se necesitarán 65.78° más los grados adicionales, un compensador no es suficiente, por lo que se necesitarán dos compensadores en adelanto, Para facilitar el diseño se utilizaran dos compensadores iguales, el ángulo que debe de proporcionar cada compensador en adelanto sería:

$$\phi_m = \frac{MF_{esp} - MF_{orig} + \phi_{adic}}{2}$$

Se propone 31° como grados adicionales

$$\phi_m = \frac{45° - 20.78° + 31°}{2} = 48.39°$$

$$\alpha = \frac{1 - sen\ \phi_m}{1 + sen\ \phi_m} = \frac{1 - sen\ (48.39°)}{1 + sen\ (48.39°)} = 0.144$$

$$2*10\log\alpha = 20\log(0.144) = -16.83\ dB$$

en $\omega = 11.3$ tenemos una magnitud de -16.83 dB, ésta sería la nueva frecuencia de transición de ganancia

$$\omega_m = 11.3$$

La caída de ángulo debido al corrimiento de frecuencia de 5.3 *a 11.3* es el defasamiento en la frecuencia de transición de ganancia original (ω_c) menos el defasamiento en la nueva frecuencia de transición de ganancia (ω_m)

$$\phi_{caida} = \angle G(j\omega_c) - \angle G(j\omega_m)$$

Esta caída deberá ser menor o igual a los grados adicionales $\phi_{adic} \geq \phi_{caida}$

$$\phi_{caida} = -200.78° - (-232°) = 31.22°$$

Como $\phi_{adic} \approx \phi_{caida}$ se continúa con el diseño, si no lo fueran habría que modificar los grados adicionales y volver a calcular

El cero del compensador sería

$$\frac{1}{T} = \omega_m\sqrt{\alpha} = 11.3\sqrt{0.144} = 4.288$$

El polo

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{4.288}{0.144} = 29.778$$

El compensador sería

$$G_c(s) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}\right)^2 = \left(\frac{1}{0.144}\right)^2 \left(\frac{s+4.288}{s+29.778}\right)^2$$

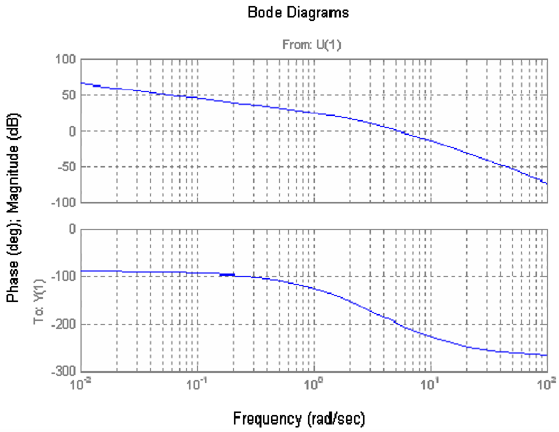
El sistema compensado es

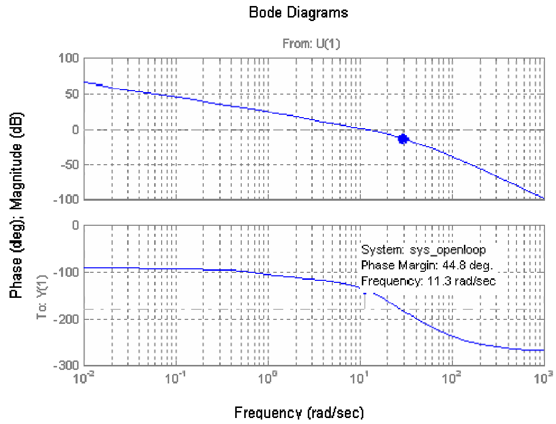
$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{240}{s(s+2)(s+6)}\right)\left(\frac{s+4.288}{s+29.778}\right)^2\left(\frac{1}{0.144}\right)^2$$

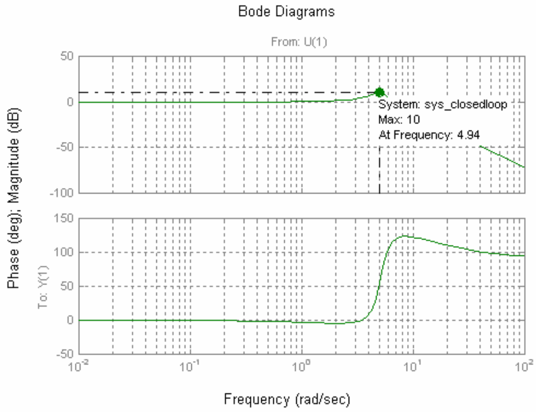
Para el sistema compensado

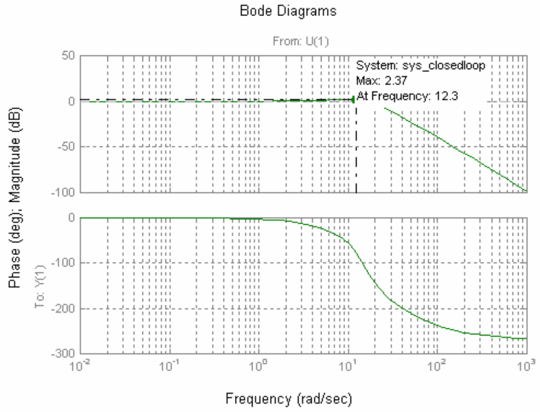
En $\omega = \omega_m = 11.3$ $\quad |G(j\omega_m)G_c(j\omega_m)| = 0.039\ dB$ y $\angle G(j\omega_m)G_c(j\omega_m) = -135.12°$

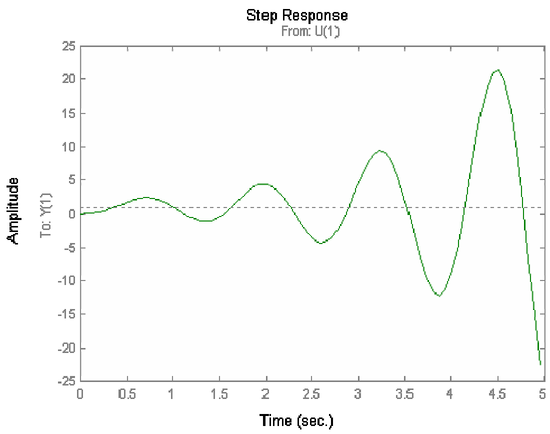
$$MF = 44.88° \qquad \omega_m = 11.3\ rad/seg$$
$$MG = 12.86\,dB \qquad \omega_f = 29.2\ rad/seg$$

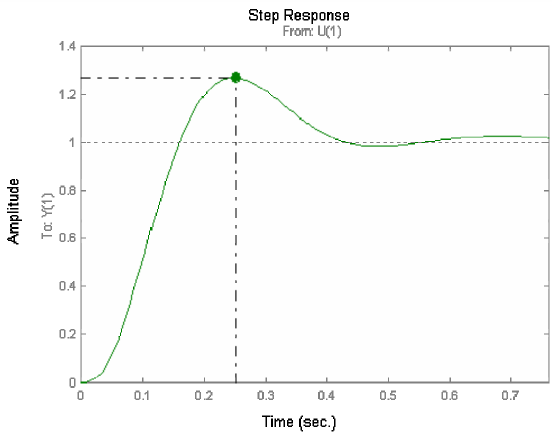

Bode Diagrams
From: U(1)
Phase (deg); Magnitude (dB)
To: Y(1)
Frequency (rad/sec)


Bode Diagrams
From: U(1)
Phase (deg); Magnitude (dB)
To: Y(1)
System: sys_openloop
Phase Margin: 44.8 deg.
Frequency: 11.3 rad/sec
Frequency (rad/sec)


Bode Diagrams
From: U(1)
Phase (deg); Magnitude (dB)
To: Y(1)
System: sys_closedloop
Max: 10
At Frequency: 4.94
Frequency (rad/sec)


Bode Diagrams
From: U(1)
Phase (deg); Magnitude (dB)
To: Y(1)
System: sys_closedloop
Max: 2.37
At Frequency: 12.3
Frequency (rad/sec)


Step Response
From: U(1)
Amplitude
To: Y(1)
Time (sec.)


Step Response
From: U(1)
Amplitude
To: Y(1)
Time (sec.)

Ejemplo 3

La función de transferencia de lazo abierto de un sistema de control es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Se desea que el sistema cumpla con las siguientes especificaciones:

El coeficiente estático de error de velocidad $K_v = 10\ seg^{-1}$

Un margen de fase $MF = 50°$

Un margen de ganancia de $MG \geq 10\ dB$

Solución

El coeficiente estático de error de velocidad del sistema original

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K}{2}$$

Como se desea que $K_v = 10$ entonces

$$\frac{K}{2} = 10 \text{ por lo que } K = 20$$

El sistema sería

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+2)}$$

El margen de fase para este sistema es

$$MF = -28.17° \qquad \omega_c = 2.43\ rad/seg$$
$$MG = -10.51 dB \quad \omega_f = 1.41\ rad/seg$$

Ya que el sistema es muy inestable, para llevar al sistema de -28.17° hasta 50° se necesitarán 78.17° más los grados adicionales por lo que se necesitarán dos compensadores en adelanto, El ángulo que debe de proporcionar cada compensador en adelanto sería

$$\phi_m = \frac{MF_{esp} - MF_{orig} + \phi_{adic}}{2}$$

Se propone 20° como grados adicionales

$$\phi_m = \frac{50° - (-28.17°) + 20°}{2} = 49.08°$$

$$\alpha = \frac{1 - sen\ \phi_m}{1 + sen\ \phi_m} = \frac{1 - sen\ (49.08°)}{1 + sen\ (49.08°)} = 0.139$$

$$2 * 10 \log \alpha = 20 \log (0.139) = -17.127\ dB$$

en $\omega = 5.08$ tenemos una magnitud de -17.127 dB, ésta sería la nueva frecuencia de transición de ganancia

$$\omega_m = 5.08$$

La caída de ángulo debido al corrimiento de frecuencia de 2.43 a 5.08 es el defasamiento en la frecuencia de transición de ganancia original (ω_c) menos el defasamiento en la nueva frecuencia de transición de ganancia (ω_m)

$$\phi_{caida} = \angle G(j\omega_c) - \angle G(j\omega_m)$$

Esta caída deberá ser aproximadamente igual a los grados adicionales $\phi_{adic} \approx \phi_{caida}$

$$\phi_{caida} = -208.17° - (-237.37°) = 29.2°$$

Como la caída de ángulo es mayor que los grados adicionales se procede a recalcular modificando los grados adicionales.

Se propone 34° como grados adicionales

$$\phi_m = \frac{50° - (-28.17°) + 34°}{2} = 56.08°$$

$$\alpha = \frac{1 - sen\ \phi_m}{1 + sen\ \phi_m} = \frac{1 - sen\ (56.08°)}{1 + sen\ (56.08°)} = 0.093$$

$$2 * 10 \log\ \alpha = 20 \log\ (0.093) = -20.63\ dB$$

en $\omega = 5.85$ tenemos una magnitud de -20.63 dB, ésta sería la nueva frecuencia de transición de ganancia

$$\omega_m = 5.85$$

La caída de ángulo debido al corrimiento de frecuencia de 2.43 a 5.85 es el defasamiento en la frecuencia de transición de ganancia original (ω_c) menos el defasamiento en la nueva frecuencia de transición de ganancia (ω_m)

$$\phi_{caida} = \angle G(j\omega_c) - \angle G(j\omega_m)$$

Esta caída deberá ser aproximadamente igual a los grados adicionales $\phi_{adic} \approx \phi_{caida}$

$$\phi_{caida} = -208.17° - (-241.42°) = 33.25°$$

Como son aproximadamente iguales $\phi_{adic} \approx \phi_{caida}$ se continua con el diseño, si no lo fueran habría que modificar los grados adicionales y volver a calcular

El cero del compensador sería

$$\frac{1}{T} = \omega_m \sqrt{\alpha} = 5.85\sqrt{0.093} = 1.784$$

El polo

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{1.784}{0.093} = 19.183$$

El compensador sería

$$G_c(s) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}\right)^2 = \left(\frac{1}{0.093}\right)^2 \left(\frac{s + 1.784}{s + 19.183}\right)^2$$

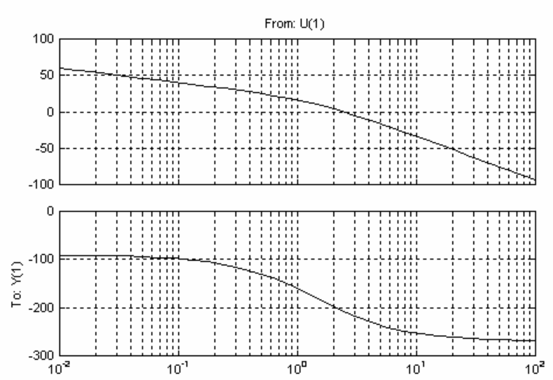
El sistema compensado es

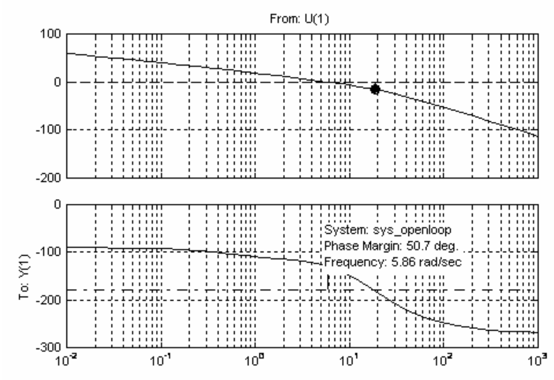
$$G(s)G_c(s) = \left(\frac{20}{s(s+1)(s+2)}\right)\left(\frac{s+1.784}{s+19.183}\right)^2 \left(\frac{1}{0.093}\right)^2$$

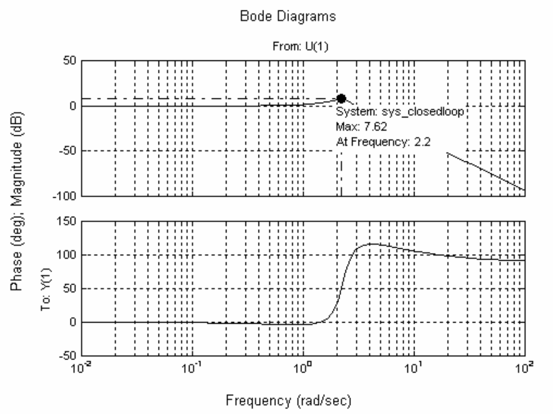
Para el sistema compensado

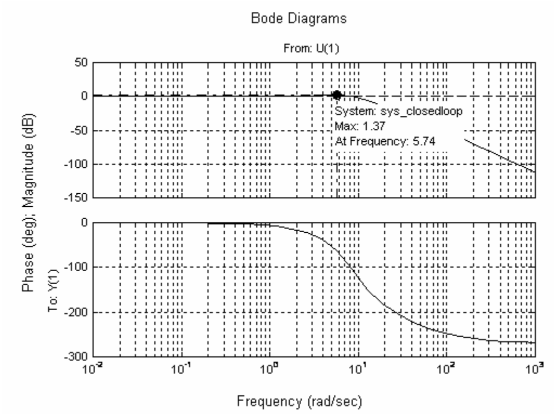
En $\omega = \omega_m = 5.85$ $\quad |G(j\omega_m)G_c(j\omega_m)| = 0.016\ dB$ y $\angle G(j\omega_m)G_c(j\omega_m) = -129.26°$

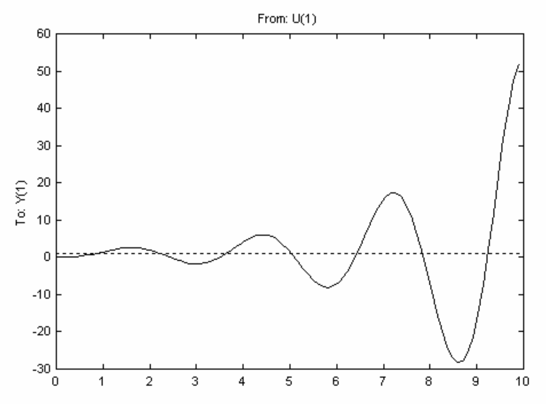
$$MF = 50.74° \qquad \omega_m = 5.85\ rad/seg$$
$$MG = 15.17\ dB \qquad \omega_f = 18.61\ rad/seg$$

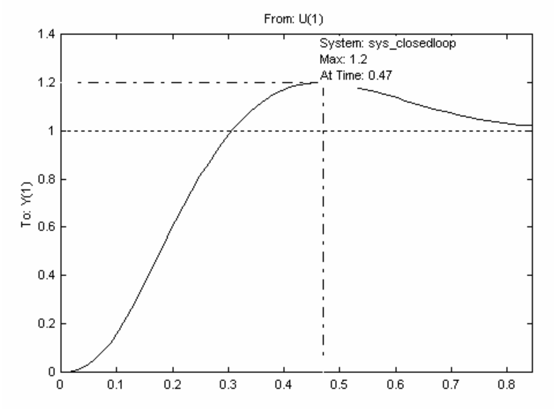

From: U(1)
To: Y(1)


From: U(1)
To: Y(1)
System: sys_openloop
Phase Margin: 50.7 deg.
Frequency: 5.86 rad/sec


Bode Diagrams
From: U(1)
System: sys_closedloop
Max: 7.62
At Frequency: 2.2
Phase (deg); Magnitude (dB)
To: Y(1)
Frequency (rad/sec)


Bode Diagrams
From: U(1)
System: sys_closedloop
Max: 1.37
At Frequency: 5.74
Phase (deg); Magnitude (dB)
To: Y(1)
Frequency (rad/sec)


From: U(1)
To: Y(1)


From: U(1)
System: sys_closedloop
Max: 1.2
At Time: 0.47
To: Y(1)